Tehnička mehanika 2 - drugi deo ispita

(Prvi deo: 13. april 2006.)

ZADATAK 1 (. . . 30%)

Dve materijalne tačke P i Q, masa m_1 i m_2, nalaze se u vertikalnoj ravni i mogu da se kreću u vertikalnom pravcu. Tačka P je vezana za nepokretnu podlogu oprugom krutosti k_1, dok su tačke međusobno vezane oprugom krutsoti k_2. Na tačku P deluje spoljašnja vertikalna sila $F(t) = F_0 \sin \Omega t$, slika 1. Prikazane generalisane koordinate se mere u odnosu na položaj statičke ravnoteže sistema. Napisati diferncijalne jednačine kretanja sistema.

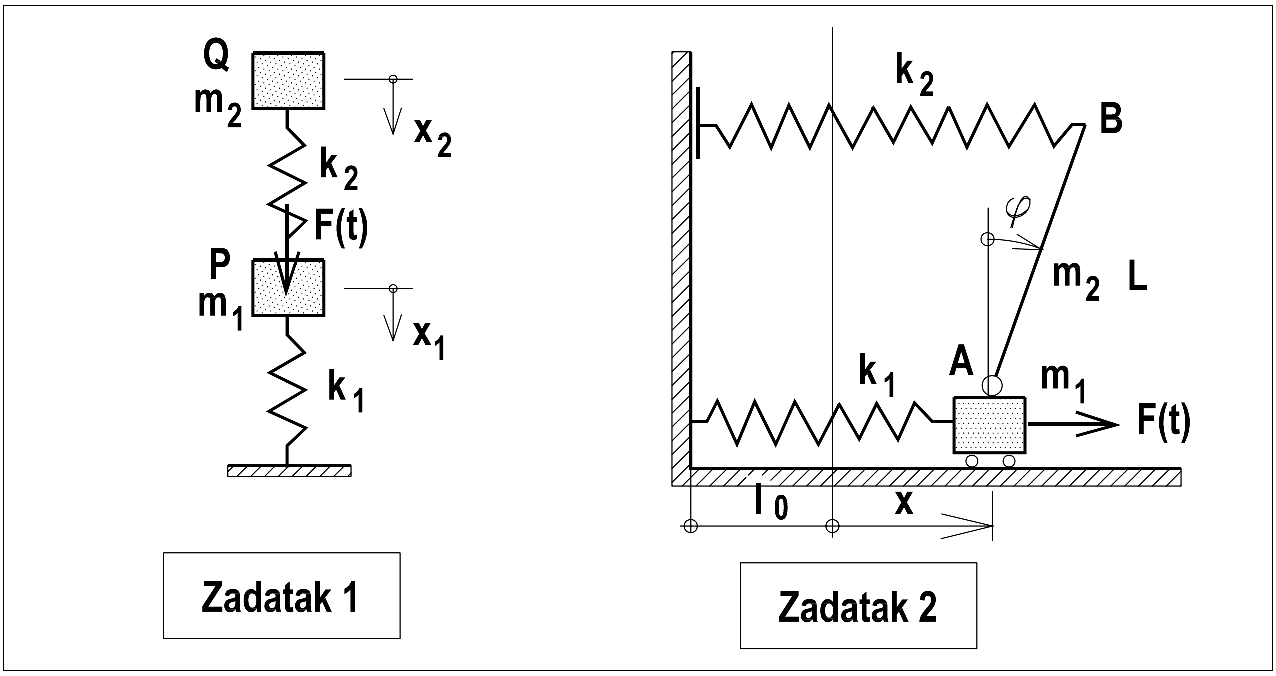
ZADATAK 2 (. . . 35%)

U vertikalnoj ravni duž horizontalnog pravca kreće se materijalna tačka A, mase m_1 usled delovanja sile $F(t)$. Za tačku A je zglobno vezan štap AB, mase m_2 i dužine L. Tačka A i štap AB su vezani za vertikalan zid oprugama krutosti k_1 i k_2. Obe opruge su nenapregnute kada su na rastojanju l_0 od zida, slika 2. Napisati diferencijalne jednačine kretanja sistema.

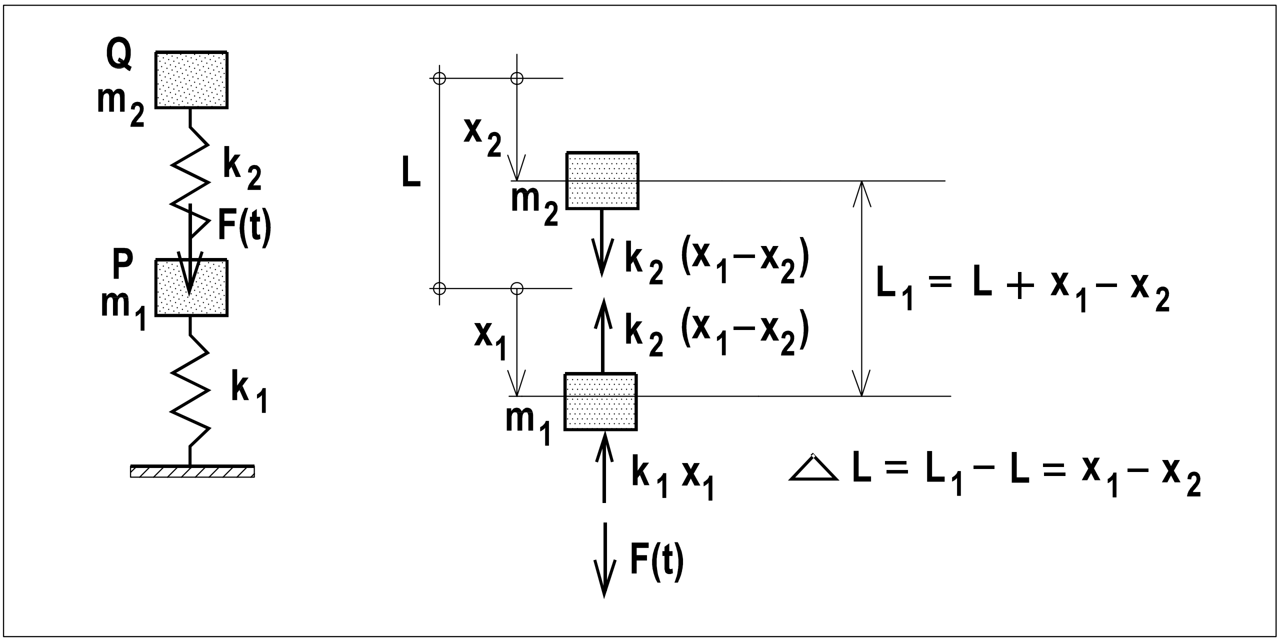
ZADATAK 3 (. . . 35%)

(a) **(. . . 10%) Prikazati analizu kosog udara materijalne tačke u nepokretnu prepreku.**

(b) **(. . . 25%) Poznato je da je, u posmatranom slučaju kosog udara tačke u nepokretnu prepreku, odbojni ugao β dva puta veći od upadnog ugla α, (pri čemu se oba ugla mere u odnosu na normalu n na tangencijalnu ravan prepreke u tački udara), kao i da je brzina tačke neposredno posle udara v_2 dva puta manjeg intenziteta od intenziteta brzine tačke neposredno pre udara v_1. Odrediti, za taj slučaj, udarni impuls I, koeficijent udara k, kao i maksimalnu vrednost upadnog ugla α_{max}.**



ZADATAK 1 (...30%)
Sistem ima dva stepena slobode, $q_1 = x_1$ i $q_2 = x_2$. Na slici ?? su prikazane tačke u proizvoljnom položaju tokom kretanja, kao i odgovarajuće sile: aktivna sila $F(t)$, kao i unutrašnje sile veze, odn. sile u oprugama. Kako se generalisane koordinate mere od položaja statičke ravnoteže, sile sopstvenih težina tačaka su u ravnoteži sa odgovarajućim delovima sila u oprugama i ne utiču na nastalo kretanje.



Slika 1: Zadatak 1 - Proizvoljan položaj tokom kretanja sistema

Sila u donjoj opruzi je jednaka $k_1 \cdot x_1$, dok je sila u opruzi koja povezuje tačke jednaka proizvodu krutosti k_2 i relativnog pomeranja tačaka $\Delta L = x_1 - x_2$. Smer te sile je takav da teži da to relativno pomeranje bude nula. Ako se predpostavi da je $x_1 > x_2$, onda je smer te sile kao na slici ??.
Ako se za svaku od tačaka oslobođenu od veza primeni 2. Njutnov aksiom, dobija se:

$$\begin{aligned} m_1\ddot{x}_1 &= F(t) - k_1 \cdot x_1 - k_2 \cdot (x_1 - x_2) && (1) \\ m_2\ddot{x}_2 &= k_2 \cdot (x_1 - x_2) && (2) \end{aligned}$$

Kako su x_i nepoznate generalisane koordinate, to se jednačine pišu u obliku:

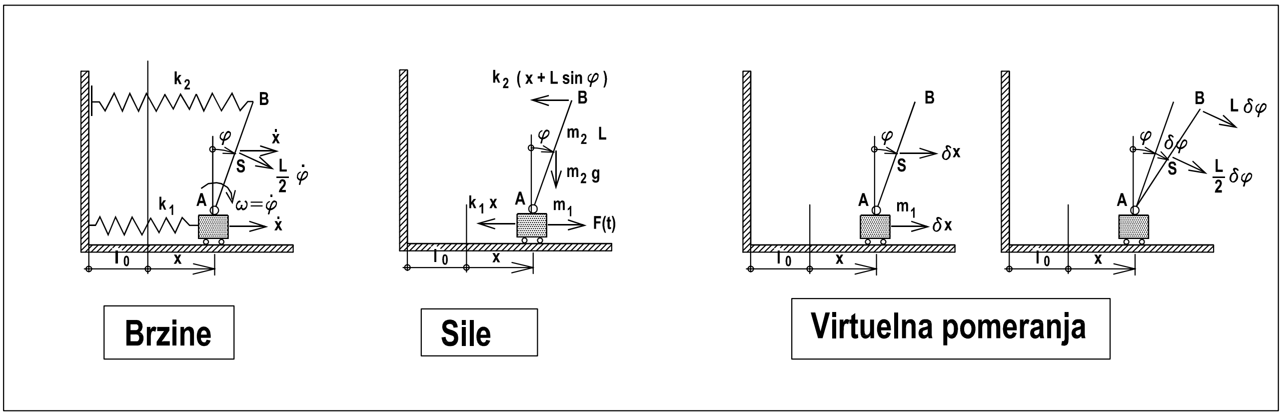
$$\begin{aligned} m_1\ddot{x}_1 + (k_1 + k_2) \cdot x_1 - k_2 \cdot x_2 &= F(t) && (3) \\ m_2\ddot{x}_2 - k_2 \cdot x_1 + k_2 \cdot x_2 &= 0 && (4) \end{aligned}$$

Diferencijalne jednačine kretanja mogu da se pogodnije prikažu u matričnom obliku:

$$\begin{bmatrix} m_1 & 0 \\ 0 & m_2 \end{bmatrix} \cdot \begin{Bmatrix} \ddot{x}_1(t) \\ \ddot{x}_2(t) \end{Bmatrix} + \begin{bmatrix} (k_1 + k_2) & -k_2 \\ -k_2 & k_2 \end{bmatrix} \cdot \begin{Bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} F_0 \sin \Omega t \\ 0 \end{Bmatrix} \tag{5}$$

ZADATAK 2 (...35%)

Sistem ima dva stepena slobode i generalisane koordinate $q_1 = x$ i $q_2 = \varphi$ su prikazane na slici. Diferencijalne jednačine kretanja se izvode primenom Lagranževih jednačina kretanja II vrste, tako da se prvo određuje ukupna kinetička energija sistema. Na slici ??a su prikazane brzine u proizvoljnom trenutku tokom kretanja, koje su potrebne da bi se odredila kinetička energija. Kinetička energija je jednaka $T = T_1 + T_2$, gde je T_1 kinetička energija materijalne tačke A, a T_2 kinetička energija štapa AB. Tačka A vrši translatorno kretanje u pravcu horizontalne ose, a štap AB vrši složeno kretanje.



Slika 2: Zadatak 2 - Brzine, sile i virtuelna pomeranja sistema

Kinetičke energije tačke A i štapa AB su date, redom, sa:

$$T_1 = \frac{1}{2} m_1 v_A^2 \qquad T_2 = \frac{1}{2} m_2 v_S^2 + \frac{1}{2} J_S \omega^2 \tag{6}$$

pri čemu su brzine tačke A i središta S štapa jednaki:

$$v_A = \dot{x} \qquad v_S^2 = (\dot{x} + \frac{L}{2}\dot{\varphi}\cos\varphi)^2 + (\frac{L}{2}\dot{\varphi}\sin\varphi)^2 \tag{7}$$

dok su momenat inercije štapa za središte i ugaona brzina štapa jednaki:

$$J_S = \frac{1}{12} m_2 L^2 \qquad \omega = \dot{\varphi} \tag{8}$$

Sređivanjem se dobija ukupna kinetička energija sistema u obliku

$$T = \frac{1}{2}(m_1 + m_2)\dot{x}^2 + \frac{1}{2} m_2 L \dot{x}\dot{\varphi}\cos\varphi + \frac{1}{6} m_2 L^2 \dot{\varphi}^2 \tag{9}$$

Odgovarajući izvodi kinetičke energije, odnosno leve strane diferencijalnih jednačina kretanja se dobijaju u obliku:

$$(m_1 + m_2)\ddot{x} + \frac{1}{2} m_2 L \ddot{\varphi}\cos\varphi - \frac{1}{2} L \dot{\varphi}^2 \sin\varphi \;=\; Q_x \tag{10}$$

$$\frac{1}{2} m_2 L \ddot{x}\cos\varphi + \frac{1}{3} m_2 L^2 \ddot{\varphi} \;=\; Q_\varphi \tag{11}$$

Imajući u vidu sile koje deluju na sistem, prikazane na slici ??b, kao i odgovarajuća virtuelna pomeranja $\delta x \neq 0 \wedge \delta\varphi = 0$, kao i $\delta x = 0 \wedge \delta\varphi \neq 0$, prikazana na slici ??c, generalisane sile se dobijaju u obliku:

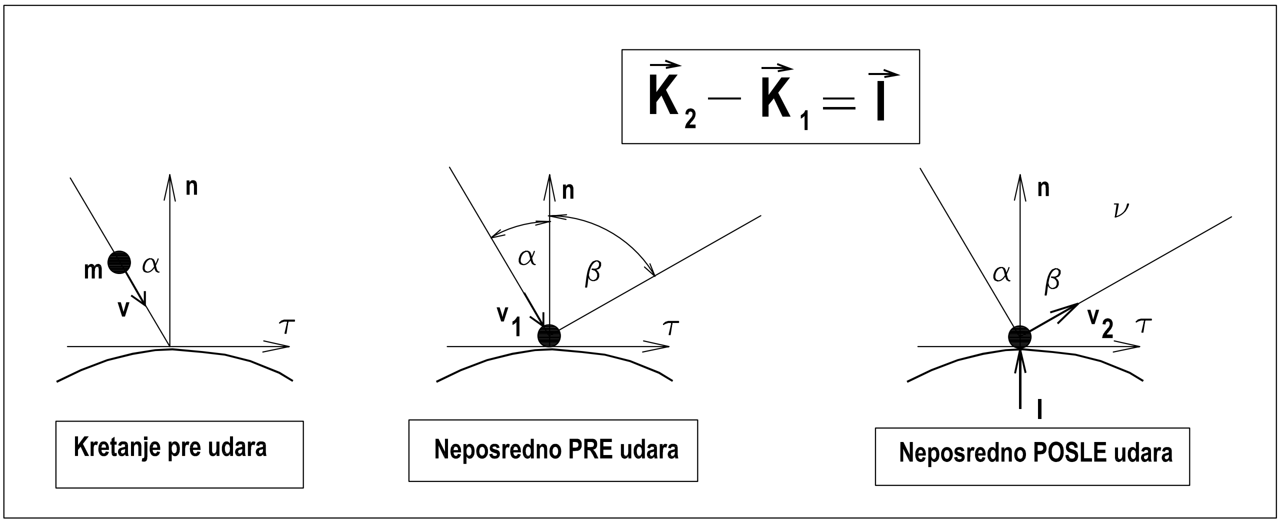
$$Q_x = F(t) - (k_1 + k_2)x - k_2 L \sin\varphi \tag{12}$$

$$Q_\varphi = \frac{1}{2} m_2 g L \sin\varphi - k_2 x L \cos\varphi - k_2 L^2 \sin\varphi \cos\varphi \tag{13}$$

Znači, diferencijalne jednačine kretanja su date sa (10) - (13).

ZADATAK 3 (...35%)

Na slici ?? je prikazana materijalna tačka mase m koja se približava nepokretnoj prepreci duž pravca koji zaklapa ugao α prema normali na tangencijalnu ravan u tački udara u prepreku. Posmatra se trenutak neposredno pre i neposredno posle udara tačke.



Slika 3: Zadatak 3 - Kos udar tačke u nepokretnu prepreku

Neposredno pre udara, tačka je imala brzinu intenziteta v_1 čiji je pravac zaklapao ugao α sa normalom n, a neposredno posle udara brzina je intenziteta v_2 sa pravcem datim sa uglom β prema normali. Udar tačke u prepreku je određen sa zakonom o promeni količine kretanja za trenutke neposredno posle i neposredno pre udara:

$$\vec{K}_2 - \vec{K}_1 = \vec{I} \tag{14}$$

gde je $\vec{I} = I\vec{n}$ udarni impuls, koji predstavlja uticaj uklonjene prepreke na posmatranu tačku. Ako se jednačina (??) projektuje na pravce tangente τ i normale n, dobija se:

$$m v_2 \sin\beta - m v_1 \sin\alpha = 0 \tag{15}$$

$$m v_2 \cos\beta + m v_1 \cos\alpha = I \tag{16}$$

U jednačinama (15) i (16) su nepoznate veličine ugao β, intenzitet brzine v_2, kao i udarni impuls I, tako da ne mogu da se odrede nepoznate veličine iz te dve jednačine. U skladu sa Njutnovom teorijom udara, usvaja se, kao poznata veličina, koeficijent udara $k \in [0, 1]$. Koeficijent udara, u ovom slučaju, predstavlja odnos apsolutnih vrednosti projekcija brzina na pravac normale n neposredno posle i neposredno pre udara:

$$k = \frac{v_2 \cos\beta}{v_1 \cos\alpha} \tag{17}$$

Iz jednačine (??) se dobija relacija

$$v_2 \cos\beta = k v_1 \cos\alpha \tag{18}$$

tako da se iz jednačine (16) dobija udarni impuls u obliku:

$$I = m(1 + k) v_1 \cos\alpha \tag{19}$$

Imajući u vidu jednačinu (15), dobija se intenzitet brzine tačke neposredno posle udara u obliku:

$$v_2 = \sqrt{v_{2\tau}^2 + v_{2n}^2} = \sqrt{(v_1 \sin\alpha)^2 + (k v_1 \cos\alpha)^2} \tag{20}$$

odnosno, u obliku:

$$v_2 = v_1 \cdot \sqrt{\sin^2\alpha + k^2 \cos^2\alpha} \tag{21}$$

Sa relacijama (19) i (21) su određeni udarni impuls i intenzitet brzine tačke neposredno posle udara, dok se odbojni ugao β može da odredi ili iz jednačine (15) ili iz jednačine (??), u obliku:

$$\sin\beta = \frac{v_1}{v_2} \sin\alpha \qquad \textbf{odnosno} \qquad \cos\beta = k \cdot \frac{v_1}{v_2} \cos\alpha \tag{22}$$

Zadatkom se traži da se posmatra slučaj kada je odbojni ugao β dva puta veći od upadnog ugla α, kao i da je intenzitet odbojne brzine v_2 dva puta manji od intenziteta upadne brzine v_1. Znači, posmatraju se uslovi:

$$\beta = 2\alpha \qquad v_2 = \frac{1}{2} v_1 \tag{23}$$

Imajući ovo u vidu, koeficijent udara, koji je dat sa (??), mora da bude jednak:

$$k = \frac{v_2 \cos\beta}{v_1 \cos\alpha} = \frac{1}{2} \cdot \frac{\cos(2\alpha)}{\cos\alpha} = \frac{1}{2} \cdot (\cos\alpha - \tan\alpha) \tag{24}$$

jer je $\cos(2\alpha) = \cos^2\alpha - \sin^2\alpha$. Kako je udarni impuls dat sa izrazom (??), to može da se dobije izraz za udarni impuls, na primer, u obliku

$$I = \frac{1}{2} m v_1 (cos 2\alpha + 2\cos\alpha) \tag{25}$$

ili u nekom drugom ekvivalentnom prikazu.

Najveća vrednost odbojnog ugla je $\beta_{max} = 90^0$, što, načelno, odgovara idealno plastičnom udaru, odnosno koeficijentu udara koji je jednak nuli: $k = 0$. U posmatranom slučaju se traži da je odbojni ugao dva puta veći od upadnog, tako da bi najveća vrednost upadnog ugla bila $\alpha_{max} = 45^0$. Međutim, imajući u vidu izraz (??) za koeficijent udara, za upadni ugao od $\alpha = 45^0$ se dobija:

$$k(\alpha = 45^0) = \frac{1}{2}(\cos(45^0) - \tan(45^0)) = -0.1464 < 0 \tag{26}$$

što nema smisla, jer je koeficijent udara realan ne-negativan broj $k \in [0, 1]$. Prema tome, ako se postavi uslov da je koeficijent udara najmanji mogući, dobiće se najveći mogući upadni ugao za postavljene uslove. Znači:

$$k = 0 \qquad \Rightarrow \qquad \cos\alpha - \tan\alpha = 0 \qquad \Rightarrow \qquad \alpha_{max} \tag{27}$$

Rešavanjem jednačine (??), na primer probanjem, može da se dobije približna vrednost maksimalnog upadnog ugla:

$$f(x) = \cos x - \tan x = 0 \qquad \Rightarrow \qquad f(38^0) = 0.0067 \qquad f(39^0) = -0.0326 \tag{28}$$

odnosno,

$$x_0 = \alpha_{max} \approx 38.3^0 \tag{29}$$